有限古典群の既約指標の持ち上げについて (リー環,代数群とその周辺)

AUTHOR(S):

川中, 宣明

数理解析研究所講究録
394巻 1980年 180-187

有限古典群の既約指標の持ち上げについて

阪大・理　川中宣明

本稿は，六甲群論シンポジウム（1980）報告集に書いたもの（以下［六甲］と略記）の続きで，そこの定理の証明を中心に述べる．記号はすべて［六甲］の通りとする．特に，χ を G（＝標数 $p>0$ の閉体上の古典群の $\mathbb{F}_{q^m}$-有理点のなす有限群）の σ で固定される既約指標，$\tilde{\chi}$ を χ の AG（＝位数 m の巡回群 $A=\langle\sigma\rangle$ と G との半直積群）の既約指標への拡張としたとき，G_σ（$=\{G$ の σ-fixed point$\}$）上の類関数 ψ_χ を

$$\psi_\chi(C)=\tilde{\chi}(m(C)) \qquad (C は G_\sigma の共役類)$$

で定義する（m の定義は，［六甲］を参照）．$(p,m)=(2,m)=1$ なる条件のもとで，ψ_χ が G_σ の既約指標（定数倍を除いて）となることを示したい．

証明には，[2] と同様，Brauer の characterization of characters を用いる．即ち，次のことを示せば良い：

(I) G の任意の σ-fixed irreducible character χ と, G_σ の任意の elementary subgroup E に対して, $\psi_\chi|_E$ が E の irreducible characters の $\mathbb{Z}[e^{\frac{2\pi i}{m}}]$-linear combination として書ける.

このためには, 次のことを言えば十分:

(II) G_σ の任意の elementary subgroup E に対して, G の次のような部分群 H がとれる:

(i) H は σ-stable.

(ii) $E \subset H_\sigma$

(iii) H_σ の既約指標は, H の既約指標に"持ち上げ"ることができる. 詳しく言えば, H の σ-fixed irreducible character ν に対して, 半直積群 AH の既約指標への拡張 $\tilde{\nu}$ を作り, H_σ 上の類関数 ϕ_ν を

$$\phi_\nu(D) = \tilde{\nu}(m_H(D)) \quad (D \text{ は } H_\sigma \text{の共役類})$$

で定義すると, ϕ_ν は定数($\in \mathbb{Z}[e^{\frac{2\pi i}{m}}]$)倍を除き H_σ の既約指標となる. ここに m_H は, $\{H_\sigma$ の共役類$\}$ から $\{\sigma H$ の AH-共役類$\}$ への bijective な対応で, 任意の $h \in H$ に対して,

$\mathfrak{m}_H^{-1}(\sigma h$ の AH-共役類$) \subset \mathfrak{m}^{-1}(\sigma h$ の AG-共役類$)$
となっているもの，とする．

[‘(II) ⇒ (I)’ の証明]

$\tilde{\chi}|_{AH} = \sum_i m_i \tilde{\nu}_i$ $(m_i \in \mathbb{Z}, \geq 0$; $\tilde{\nu}_i$: AH の既約指標$)$
とする．容易にわかるように，$\tilde{\nu}_i|_H$ が可約なら $\tilde{\nu}_i(\sigma h) = 0$
$(\forall h \in H)$ であるから

$$\psi_\chi(h') = \tilde{\chi}(\sigma h)$$
$$= \sum_i m_i \tilde{\nu}_i(\sigma h) = \sum_i{}' m_i \phi_{\nu_i}(h')$$

(但し，$h' \in \mathfrak{m}_H^{-1}(\sigma h$ の AH-共役類$)$; Σ_i' は $\tilde{\nu}_i|_H = \nu_i$ が既約であるような i についての和)．よって (II) (iii) より $\psi_\chi|_{H_\sigma}$ は，H_σ の既約指標の $\mathbb{Z}[e^{\frac{2\pi i}{m}}]$-linear combination として書ける．よって (II) (ii) より (I) が出る．

さて，(I) を証明しよう．E を G_σ の elementary subgroup とする．即ち，$E = \langle x \rangle \times R$ ．ここに $x \in G_\sigma$，R は，ある素数 r についての r-群で，$(r, \mathrm{ord}(x)) = 1$ である．$x = su$ (s = semisimple, u = unipotent) を，x の Jordan 分解とする．($\underline{G}$ は $Sp_{2n}(K)$, $SO_{2n+1}(K)$, $SO_{2n}(K)$ のうちのどれか．)

(Case 1) ‘$s \notin$ center of $\underline{G}$ かつ $r \neq 2$’ のとき．

$E \subset Z_{\underline{G}}(s)$ は明らか．$r \neq 2$ より $E \subset Z_{\underline{G}}(s)^0 = Z_{\underline{G}}(s)$

の単位元の連結成分．$\underline{H} = Z_{\underline{G}}(s)^0$ は，いくつかの smaller rank ($\because s \notin$ center $\underline{G}$) の古典群の直積．よって $H = \underline{H}_{\sigma^m}$ と置けば，induction の仮定により(II)(iii)が満たされている．

(Case 2) '$s \notin$ center of $\underline{G}$, $r = 2$' のとき．

$(\mathrm{ord}(x), r) = 1$ であるから $(\mathrm{ord}(s), 2) = 1$．よって $Z_{\underline{G}}(s)$ は連結，その中心は torus $\underline{T}$ となる．$T = \underline{T}_{\sigma^m}$ とおくと，$s \in T_\sigma$ で T_σ の既約指標は，T の既約指標に持ち上げられる．$T_1 = \{t \in T; (\mathrm{ord}(t), 2) = 1\}$ と置くと，$s \in T_1$ で，$T_{1,\sigma}$ の既約指標は，やはり T_1 の既約指標に持ち上げることができる．そこで $H = T_1 R \langle u \rangle$ と置くと，$H = T_1 \times R \times \langle u \rangle$ で，(III)(ii)(iii)の条件を満足する．(一般に，有限群 K の既約指標 μ に対し $\mu_m(k) = \mu(k^m)$ $(m \in \mathbb{Z}, k \in K)$ によって μ_m を定義するとき $(\mathrm{ord}\,K, m) = 1$ なら μ_m もまた既約指標であること，と条件'$(p, m) = (2, m) = 1$'を用いた．)

(Case 3) '$s \in$ center of $\underline{G}$, $r = p$' のとき．

$(\mathrm{ord}(x), r) = 1$ より $u = 1$，即ち $x = s$．また，$x = s \in$ center of $\underline{G}$ より $\mathrm{ord}(x) = 2$ のべき．よって $H = \langle x \rangle \times R$ とおくと，(Case 2) と同様に (II)(iii) を満足する．

(Case 4) '$s \in$ center of $\underline{G}$, $r = 2$' のとき．

$(\mathrm{ord}(x), r) = 1$ より，$(\mathrm{ord}(s), 2) = 1$．これと $s \in$ center of $\underline{G}$ より $s = 1$，即ち $x = u$．よって $H = \langle x \rangle \times R$ とす

ればよい．

（Case 5）'$s \in$ center of $\underline{\underline{G}}$，$r \neq p$，$r \neq 2$，$u=1$' のとき．この場合は，やや面倒である．簡単の為，$\underline{\underline{G}} = Sp_{2n}(K)$ or $SO_{2n+1}(K)$ の場合を詳しく述べることにする．$E = \langle s \rangle \times R$，$R$ は G_σ $(= Sp_{2n}(\mathbb{F}_q)$ or $SO_{2n+1}(\mathbb{F}_q))$ の r-Sylow subgroup $(r \neq 2, p)$ であるとしてよい．

$e = \mathrm{Min}\{$ 自然数 i | r は $(q^i - 1)$ を割る $\}$ と置く．

<u>Lemma.</u> r が (q^i-1) を割る $\Longleftrightarrow$ i は e の倍数．

は，容易にわかる．まず，e が奇数の場合を考える．

$\mathrm{ord}(G_\sigma) = q^{n^2}(q^2-1)(q^4-1)\cdots\cdots(q^{2n}-1)$ であるから，

Lemma より，

$$\mathrm{ord}(R) \mid (q^{2e}-1)(q^{4e}-1)\cdots(q^{2le}-1)$$

$$\text{ここに，}\quad 2n = 2le + k \qquad (0 \leq k < 2e)$$

$r \neq 2$ より $r \mid (q^{ie}-1) \Rightarrow r \nmid (q^{ie}+1)$．よって

$$\mathrm{ord}(R) \mid (q^e-1)(q^{2e}-1)\cdots(q^{le}-1)$$

$$\therefore\ \mathrm{ord}(R) \mid \mathrm{ord}(GL_n(\mathbb{F}_q)) \qquad (\because\ le \leq n)$$

ところが，$\underline{\underline{G}}$ の σ-stable な部分群 $\underline{\underline{H}}(\cong GL_n(K))$ で $H_\sigma = \underline{\underline{H}}_\sigma$ が $GL_n(\mathbb{F}_q)$ と同型なものが存在する．よって，Sylow の定理により，R は H_σ の部分群と思ってよい．そこで $H = \underline{\underline{H}}_{\sigma^m}(\cong GL_n(\mathbb{F}_{q^m}))$ と置けば，[1]，[2] により，(II)(iii) を満足している．

次に，eが偶数：$e=2f$，の場合を考える．Lemmaにより

$$\mathrm{ord}(R) \mid (q^e-1)(q^{2e}-1)\cdots(q^{le}-1)$$

ここに，$2n=le+j$ $(0\leq j<e)$.

eの定義により　$r \mid (q^e-1)=(q^f-1)(q^f+1)$ かつ $r\nmid(q^f-1)$.

$\therefore$ $r\mid(q^f+1)$．よってiが奇数なら $r\mid(q^{if}+1)$．

$r\neq 2$より $r\nmid(q^{if}-1)$．また，$r\mid(q^e-1)$より，偶数jに対してrは$(q^{\frac{j}{2}e}-1)=(q^{jf}-1)$を割る．よって$r\neq 2$より$r$は$(q^{jf}+1)$を割らない．以上から

$$\mathrm{ord}(R) \mid (q^f+1)(q^{2f}-1)(q^{3f}+1)\cdots(q^{lf}-(-1)^l).$$

従って，fが奇数なら

$$\mathrm{ord}(R) \mid (q+1)(q^2-1)(q^3+1)\cdots(q^n-(-1)^n)$$

$$\therefore\ \mathrm{ord}(R) \mid \mathrm{ord}(U_n(\mathbb{F}_q)).$$

よって，この場合も，$\underline{H}_\sigma \cong U_n(\mathbb{F}_q)$となるような，代数的部分群$\underline{H}$ $(<\underline{G})$に対して$H=\underline{H}_{\sigma^m}$と置くことによってO.K. 次に，$f$が偶数の場合．

$$\mathrm{ord}(R) \mid (q^2+1)(q^4-1)\cdots(q^{[\frac{n}{2}]\times 2}-(-1)^{[\frac{n}{2}]})$$

$$\therefore\ \mathrm{ord}(R) \mid \mathrm{ord}(U_{[\frac{n}{2}]}(\mathbb{F}_{q^2}))$$

ところが，$\underline{G}$の代数的部分群$\underline{H}'$ $(\cong GL_{[\frac{n}{2}]}(K)\times GL_{[\frac{n}{2}]}(K))$で$\underline{H}'_\sigma \cong U_{[\frac{n}{2}]}(\mathbb{F}_{q^2})$となるものが存在する．そこで，$n$が偶数のときは，$H=\underline{H}'_{\sigma^m}$とし，$n$が奇数のときは，

$\underline{\underline{H}}'$ の代わりに maximal rank の $\underline{\underline{H}}$ ($\cong \underline{\underline{H}}' \times GL_1(K)$) をとって，$H = \underline{\underline{H}}_{\sigma^m}$ とすればよい．(maximal rank にしたのは，'$H_\sigma \ni s$' を保障するため)．以上で，$\underline{\underline{G}} = Sp_{2n}(K)$ or $SO_{2n+1}(K)$ の場合の (Case 5) の証明は終った．$\underline{\underline{G}} = SO_{2n}(K)$ のときは，$G_\sigma = SO_{2n}^{\pm}(\mathbb{F}_q)$ ($\mathrm{ord}(G_\sigma) = \mathrm{ord}(SO_{2n}^{\pm}(\mathbb{F}_q)) = q^{n(n-1)}(q^2-1)(q^4-1)\cdots\cdots(q^{2n-2}-1)(q^n \mp 1)$) である．上と全く同じ論法により，$R$ は次のような形の部分群 H'_σ ($\subset G_\sigma$) に含まれることがわかり，この場合も O.K. となる：

e の定義は，上と同じ．

[$G_\sigma = SO_{2n}^{+}(\mathbb{F}_q)$ のとき] (A) $e = odd \Rightarrow H'_\sigma \cong GL_n(\mathbb{F}_q)$. (B) $e = 2f$, $f = odd \Rightarrow$ ① $n = odd$ のとき $H'_\sigma \cong U_{n-1}(\mathbb{F}_q)$ ② $n = even$ のとき $H'_\sigma \cong U_n(\mathbb{F}_q)$，(C) $e = 2f$, $f = even \Rightarrow$ ① $n \equiv 2 \pmod 4$ のとき，$H'_\sigma \cong U_{\frac{n-2}{2}}(\mathbb{F}_{q^2})$. ② $n \not\equiv 2 \pmod 4$ のとき，$H'_\sigma \cong U_{[\frac{n}{2}]}(\mathbb{F}_{q^2})$.

[$G_\sigma = SO_{2n}^{-}(\mathbb{F}_q)$ のとき] (A) $e = odd \Rightarrow H'_\sigma \cong GL_{n-1}(\mathbb{F}_q)$. (B) $e = 2f$, $f = odd \Rightarrow$ ① n odd のとき $U_n(\mathbb{F}_q)$ ② n even のとき $U_{n-1}(\mathbb{F}_q)$ (C) $e = 2f$, $f = even \Rightarrow$ ① $n \equiv 0 \pmod 4$ のとき $H'_\sigma \cong U_{\frac{n-2}{2}}(\mathbb{F}_{q^2})$ ② $n \not\equiv 0 \pmod 4$ のとき，$H'_\sigma \cong U_{[\frac{n}{2}]}(\mathbb{F}_{q^2})$.

次の場合を調べれば，定理の証明は完成する．

(Case 6) '$s \in$ center of $\underline{\underline{G}}$, $r \neq 2$, $r \neq p$, $u \neq 1$' のとき．

$E \subset Z_{\underline{\underline{G}}}(x) = Z_{\underline{\underline{G}}}(u)$ であるが，$r \neq 2$ より，$E \subset Z_{\underline{\underline{G}}}(u)^0$.

[3] より，$Z_{\underline{\underline{G}}}(u)^0 \cong \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{V}}$ ($\underline{\underline{M}}$ = reductive, $\underline{\underline{V}}$ = unipotent radical of $Z_{\underline{\underline{G}}}(u)^0$) と半直積に分解され，$\underline{\underline{M}}$ は，古典群をいくつか直積したものである．Sylow の定理より，$\langle s \rangle \times R \subset \underline{\underline{M}}_\sigma$．従って (Case 5) の証明より，$\underline{\underline{M}}$ の代数的な σ-stable subgroup $\underline{\underline{H}}' (\cong GL_{n_1}(k) \times GL_{n_2}(k) \times \cdots)$ で $\langle s \rangle \times R \subset \underline{\underline{H}}'_\sigma$ なるものが存在する．そこで H として $\underline{\underline{H}}'_{\sigma^m} \times \langle u \rangle$ をとればよい．これで (II) の証明が完成した．

文献

[1] T. Shintani: Two remarks on irreducible characters of finite general linear groups, J. Math. Soc. Japan 28 (1976), 396–414.

[2] N. Kawanaka: On the irreducible characters of the finite unitary groups, J. Math. Soc. Japan 29 (1977), 425–450.

[3] T. A. Springer - R. Steinberg: Conjugacy Classes (= Part of Springer Lecture Notes in Math. Vol. 131 (1970)).